数理解析研究所講究録
1103 巻 1999 年 138-149

関数体上のセルバーグ・ゼータ関数

慶応大理工　名越弘文 (Hirofumi Nagoshi)

1　はじめに

1956 年頃、Selberg は、上半平面 $\mathbb{H}$ に作用する cofinite な離散部分群 $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ に関して、Selberg 跡公式と呼ばれる理論を構築し、Selberg ゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ と呼ばれる関数を導入しました。そして、1987 年頃に Sarnak, Voros, Kurokawa らによって $Z_\Gamma(s)$ は $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上のラプラシアンの行列式表示を持つことが分かりました。本稿では、その設定の類似として、有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の関数体に関して調べたものについて考えます。上半平面 $\mathbb{H}$ の代わりに、一般には Bruhat-Tits building と呼ばれますが、このときには、$q+1$-正則 tree X が対応します。X に作用するある離散群で X を割ってできる商グラフの上で、Selberg の理論を展開することを考えます。これらに関して、別の側面から、もう一言付け足しておきます。k-正則な有限グラフで、それ上の隣接ラプラシアンの固有値の絶対値が $2\sqrt{k-1}$ で押さえられるようなグラフをラマヌジャン・グラフと言います。このような固有値の制限があるとき、ここでは、説明しませんが、そのグラフの magnification を大きくし、また diameter が小さくなり、つまり、ネットワーク的に非常に効率の良いものになります。また、ラマヌジャン・グラフは、コンピュータ・サイエンスにおいていろんな応用があることが知られています。しかし、頂点数が非常に大きな有限グラフになると、そのグラフがラマヌジャンであるかどうかを見るのはとても難しくなってしまいます。そのため、頂点数が無限に大きくなるようなラマヌジャン・グラフの列を具体的に与えることすら難しく、それは Lubotzky, Phillips, Sarnak [LPS] と Margulis [Ma] によって独立に初めて構成されました。それは quaternion algebras の数論的性質と重さ 2 のカスプフォームに作用する Hecke 作用素のラマヌジャン予想をもとに構成されます。それがラマヌジャン・グラフの名前に由来です。その後、いくつかの具体的なラマヌジャン・グラフの列の構成が知られています。それは、大きく分けて 3 種類に分かれますが、どれもある種の数論的性質を使うことによって構成しているのが現状です。その後、1994 年になって Morgenstern [M1] は、ラマヌジャン・グラフのある一般化としてラマヌジャン・ダイアグラムというものを定義しま

した。それは、ある種の無限グラフも含まれるような概念です。そしてまた、[M2] でラマヌジャン・ダイアグラムの列の具体例を与えていますが、それが先ほど言ったもので有限体上の一変数関数体上の $GL(2)$ の主合同部分群 $\Gamma(A), A \in \mathbb{F}_q[t]$ から作られる有限体積な無限グラフです。ラマヌジャン・ダイアグラムであることの証明には、Drinfeld [Dr] によるラマヌジャン予想の解決を使っています。特に、このグラフ上の隣接ラプラシアンの離散スペクトル λ のうちで、自明なもの $(\pm(q+1))$ 以外は、$|\lambda| \leq 2\sqrt{q}$ を満たしています。これにより、合同部分群から作られるものもラマヌジャン・ダイアグラムですが、これらは有限グラフでないラマヌジャン・ダイアグラムの列の今まで知られてる唯一の例です。

ところで、スペクトル幾何やグラフ理論の側面から有限グラフについては跡公式・セルバーグ・ゼータ関数とか井原ゼータ関数とか呼ばれているグラフのゼータ関数に関することはよく知られていました。しかし、無限グラフに関しては、スペクトル等の基本的なことからして、まだよく分かってないことが現状で、ましてや、無限グラフの跡公式やセルバーグ・ゼータ関数に一つも知られていませんでしたが、上記のような、ある意味、数論的アプローチにより、ある種のものですが、無限グラフに関して初めて得られたことが今回の成果とも言えます。そのセルバーグ・ゼータ関数は、隣接ラプラシアンの行列式表示を持ちますが、その行列式表示は離散スペクトルと連続スペクトルの両方から成りたっており、そのどちらも q^{-s}の有理関数となります。

また今回、そのグラフ $\Gamma(A)\backslash X$ の離散スペクトルに関して、跡公式を何度か使うことにより、ある種の極限分布を得たのでそれについても述べます。詳しくは、後の節を見てください。それは、良く知られている Sato-Tate 予想のある種の類似とも見れます。

以上が本稿や現状に関しての非常におおまかな説明です。

2 準備

まずはじめに、この節では、考察する対象についての設定を説明したいと思います。qを奇素数べきとして、$\mathbb{F}_q[t]$ を有限体 $\mathbb{F}_q$上の多項式環とし、$k = \mathbb{F}_q(t)$ をその商体、k上の $1/t$ (無限点) での付値を $v_\infty(f/g) = \deg g - \deg f \, (f, g \in \mathbb{F}_q[t])$ で定め、それに関して kを完備化した体を k_∞とします。体 k_∞は $\mathbb{F}_q$係数で $1/t$ のローラン級数全体でできる体 $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ と

なります。また、r_∞をk_∞の整数環とすると、r_∞はテーラー級数の環$\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]$です。この先、$G = PGL(2,k_\infty)$、$K = PGL(2,r_\infty)$と置くことにします。KはGの極大コンパクト部分群です。等質空間$X = G/K$には、[S1, II.1.1] に述べられているように、$q+1$正則 tree の構造を入れることが出来ます。ここで、$X = G/K$の各 coset が、この tree の頂点に対応するので、以後、その$q+1$正則 tree をXと書くことにします。頂点gK $(g \in G)$は、$q+1$個の頂点と隣接しているわけですが、

$$\{s_1, \cdots, s_{q+1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} t^{-1} & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{F}_q \right\} \cup \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、それらはgs_iK $(i = 1, \cdots, q+1)$に対応する頂点です。

群Gが tree Xに自己同型群として作用しますが、Gの部分群Γが inversions なく、Xに作用するとき、自然に商グラフ$\Gamma\backslash X$が考えれます。一般に、ΓをGの co-finite な離散部分群としたとき、Lubotzky [Lu, Th.6.1.] によって商グラフ$\Gamma\backslash X$は、有限グラフ$\mathcal{F}_0$に有限個の半直線（end 部分）が付いたようなものになることが知られています。例えば、フルモジュラー群$\Gamma = \Gamma(1) := PGL(2, \mathbb{F}_q[t])$の商グラフ$\Gamma\backslash X$は半直線になります [S1, II.1.6]。ここで、注意しておくことは、それら商グラフ$\Gamma\backslash X$は頂点や辺に重みがついた重み付きのグラフです。[S1] の言葉で言えば、graph of groups と言った方がいいかもしれません。それら頂点の重みはGのハール測度から定まりますが、Kの体積$vol(K)$を 1 にしておくと、各頂点$v \in V(\Gamma\backslash X)$の重みは$m(v) = |\Gamma_v|^{-1}$となります。ここで、頂点$v \in V(\Gamma\backslash X)$ (resp. 辺$e \in E(\Gamma\backslash X)$) の固定化群$(\subset \Gamma)$をΓ_v (resp. Γ_e) と表すことにします。また、後のために、$e \in E(\Gamma\backslash X)$に対して、$m(e) = |\Gamma_e|^{-1}$と置きます (これが各辺の重みと見れます)。

以下、扱う関数はXや$\Gamma\backslash X$上の$\mathbb{C}$-値な関数を扱います。これらの関数に作用するラプラシン（隣接作用素）を

$$(Tf)(v) := \sum_{d(v,u)=1} f(u) \qquad (f\colon V(X) \to \mathbb{C})$$

で定めます。ここで、dはX上の自然な距離、つまりvとuが隣接していれば$d(v,u) = 1$とするものとします。この作用素は、自然に$\Gamma\backslash X$上に作用素を引き起こしますが、それは

$$(Tf)(v) = \sum_{e=(v,u)\in E(\Gamma\backslash X)} \frac{m(e)}{m(v)} f(u) \qquad (f\colon V(\Gamma\backslash X) \to \mathbb{C}).$$

と書かれることが分かります。また、Tだけでなく、各 $m(=0,1,2,\cdots)$ に対して、距離が m にある点に関して足し合わせるという作用素：

$$(T_m f)(v) := \sum_{d(v,u)=m} f(u) \qquad \text{for } f\colon V(X) \to \mathbb{C}$$

$(T_0 = I = \text{identity}, T_1 = T)$ も用意しておきます。このとき、次のような recursive relation があります。

$$T_1^2 = T_2 + (q+1)T_0$$
$$T_1 T_m = T_{m+1} + qT_{m-1} \quad (m \geq 2).$$

また、この二式から恒等式

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m u^m = \frac{1-u^2}{1-T_1 u + qu^2} \tag{1}$$

が得られます。u は不定元です。

3　跡公式、セルバーグ・ゼータ関数

本稿では、Γとして Section 1 でも述べたような、主合同部分群

$$\Gamma(A) = \{\gamma \in PGL(2, \mathbb{F}_q[t]) \,|\, \gamma \equiv I \ (mod\, A)\} \quad (A \in \mathbb{F}_q[t])$$

を扱うことにします。ここで、$\deg(A) = a \geq 1$ としておきます。注意として、フルモジュラー群$\Gamma(1)$ のときはずっと以前に [Ak] によって直接計算で扱われていたことを述べておきます。今回の結果は、グラフを使うことによって、より一般に扱えるよう見通しよく計算しました。また、その計算のやり方は、$GL(2,\mathbb{R})$ の場合とよく似ています。商グラフ$\Gamma\backslash X$は有限グラフでないので、離散スペクトルだけでなく、連続スペクトルも出てくるのですが、それを扱うために、いわゆる（非正則）Eisenstein 級数を定義します。まず、関数 $\psi_s(g)\,(g \in G, s \in \mathbb{C})$ を

$$\psi_s(g) := |\det(g)|_\infty^s h((0,1)g)^{-2s}$$

と置きます。ここで、$h((x,y)) := \sup\{|x|_\infty, |y|_\infty\}$です。このとき、$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in G \right\}$とすると、関数$\psi_s(g)$は$K$-rightで$N$-left invariantであり、また

$$(T\psi_s)(g) = (q^s + q^{1-s})\,\psi_s(g) \tag{2}$$

を満たします。次に、同値でないカスプの代表元の集合を$\kappa_1, \cdots, \kappa_\mu$とします。そして、各カスプ$\kappa_i$に対して、その固定化群を$\Gamma_{\kappa_i}(\subset \Gamma)$とし、$\tilde{\kappa}_i\infty = \kappa_i$となる$G$の元を固定しておきます。以上のもと、カスプ$\kappa_i$に対するEisenstein級数を

$$E_i(g,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\kappa_i} \backslash \Gamma} \psi_s(\tilde{\kappa}_i^{-1} \gamma g)$$

で定義します。(2)より、

$$(TE_i)(g,s) = (q^s + q^{1-s})E_i(g,s) \tag{3}$$

が成り立ちます。Eisenstein級数はΓ-不変なので、各カスプに関してフーリエ展開が出来ますが、特に、主合同部分群の場合、Li [L1]が具体的に計算していて、$\mathbb{F}_q[t]$ mod AのDirichlet$L$-関数を用いて表しています。特に、$E_i(g,s)$をカスプκ_jでフーリエ展開した時の定数項は$\delta_{ij}q^{ns} + \varphi_{ij}(s)q^{n(1-s)}$のような形をしていますが、ここで行列$\Phi(s)$を$\Phi(s) := (\varphi_{ij}(s))$と置き、$\varphi(s) := \det \Phi(s)$とします。行列$\Phi(s)$とその行列式$\varphi(s)$をそれぞれ$\Gamma$の散乱行列、散乱行列式と言います。このとき、次が知られています。

Theorem 3.1 [L1, p. 241, p. 242, p. 249] $\Gamma = \Gamma(A)\,(A \in \mathbb{F}_q[t])$とする。関数$\varphi_{ij}(s)$は$q^{-2s}$の有理関数で、また$g \in X$を固定した時、$E_i(g,s)$は$q^{-s}$の有理関数。さらに、$\varphi_{ij}(s)$と$E_i(g,s)$で$g \in X$を固定したものは、$s = 1 + n\pi i/\log q\,(n \in \mathbb{Z})$での1位の極以外は、$Re(s) \geq 1/2$で正則。行列$\Phi(s)$は対称で

$$\Phi(s) \cdot \Phi(1-s) = I.$$

を満たす。

これらの準備のもとにΓの跡公式を具体的に書き下してみることを考えます。関数 $F \in L^1(G) \cap C(K\backslash G/K)$ (ここで $C(K\backslash G/K)$ は $K\backslash G/K$上の連続関数全体です。) を取ってきて、積分核 $k(g,g') := F(g'^{-1}g)$ を持つ $L^2(\Gamma\backslash X)$ 上の積分作用素 L_k:

$$(L_k f)(g) := \int_X k(g,g')f(g')dg' \quad \left(f \in L^2(\Gamma\backslash X)\right),$$

を考えます。これは、$K(g,g') = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(g,\gamma g')$ と置くと

$$(L_k f)(g) = \int_{\Gamma\backslash X} K(g,g')f(g)dg,$$

とも書けます。また、X上の関数fが$Tf = \lambda f$を満たしているとき、$\lambda = q^s+q^{1-s}, s = 1/2+r$と書けば、積分作用素$L_k$に関して積分核$k(\cdot,\cdot)$と$\lambda$によるある$h(r)$で$L_k f = h(r)f$となることが知られています。この対応、つまり、$k(\cdot,\cdot) \to h(r)$ を、Selberg 変換と呼び、その対応は $c(n)\,(n \in \mathbb{Z})$ という関数を仲介して明確に定まります。こららのもと、カスプでのこれらの関数達の様子を見てやることにより次が得られます。

Proposition 3.1 関数 $F \in L^1(G) \cap C(K\backslash G/K)$ を与えて、その *Selberg*変換を $h(r)$ としたとき、積分核 $H(g,g')$ を

$$H(g,g') = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{q\log q}{4\pi q^a} \int_{-\frac{\pi}{\log q}}^{\frac{\pi}{\log q}} h(r)E_i(g,s)E_i(g',\bar{s})dr \quad (s = \frac{1}{2}+ir).$$

と置くと、$\hat{K}(g,g') := K(g,g') - H(g,g')$ は$\Gamma\backslash X$上で有界である。また、$\mathcal{D}$を Tのすべての $L^2(\Gamma\backslash X)$-固有関数の集合とするとき、$f \in \mathcal{D}$に対して

$$\int_{\Gamma\backslash X} H(g,g')f(g')dg' = 0.$$

となる。

これよりいつものように、積分作用素のトレースをスペクトルの和と対角積分の2通りで表してやり、対角積分の方をΓの共役類に渡る和として書き改め、各共役類に対応する積分を計算してやることにより跡公式の最終的な形を得ます。それは、次のようになります。

Theorem 3.2 [N1, Th.4.2] qを奇素数べき、$\Gamma=\Gamma(A)$ $(A\in\mathbb{F}_q[t]\,,\deg(A)=a\geq 1)$ とし、$\mathfrak{P}_\Gamma$でΓの素双曲共役類全体を表わすとする。今、数列 $c(n)\in\mathbb{C}\,(n\in\mathbb{Z})$ が $c(n)=c(-n)$ と $\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{|n|}{2}}|c(n)|<\infty$ を満たすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{M} h(r_n)\\
=\;& vol(\Gamma\backslash X)F(I)\\
+\;& \sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\deg P}{q^{\frac{l\deg P}{2}}}c(l\deg P)\\
+\;& \left(\mu-Tr\,\Phi\Big(\frac{1}{2}\Big)\right)\left(\frac{1}{2}c(0)+\sum_{m=1}^{\infty}c(2m)\right)\\
+\;& \frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{\log q}}^{\frac{\pi}{\log q}} h(r)\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\frac{1}{2}+ir\right)dr\\
-\;& \mu\left(a+\frac{1}{q-1}\right)c(0).
\end{aligned}$$

ここで、MはTの固有値の個数で、$P\in\mathfrak{P}_\Gamma$に対して $\deg P=\min\{d(v,Pv)|v\in V(X)\}$ とする。

次に、Γに対するセルバーグ・ゼータ関数を定義したいと思います。$P\in\mathfrak{P}_\Gamma$に対して $N(P)=\sup\{|\lambda_i|_\infty^2\mid\lambda_i$ は行列Pの固有値$\}$ と置くと、$\Gamma\subset PGL(2,\mathbb{F}_q[t])$ より $N(P)=q^{\deg P}$ が分かります。このとき、セルバーグ・ゼータ関数を

$$Z_\Gamma(s):=\prod_{\{P\}_\Gamma\in\mathfrak{P}_\Gamma}\left(1-N(P)^{-s}\right)^{-1}$$

と定義します。次に、先の跡公式を使うことにより、$Z_\Gamma(s)$ の Tによる行列式表示を求めることが出来ます。ここで Th 3.1により散乱行列式$\varphi(s)$ を

$$\varphi(s)=c\frac{(q^{2s}-qa_1)(q^{2s}-qa_2)\cdots(q^{2s}-qa_m)}{(q^{2s}-qb_1)(q^{2s}-qb_2)\cdots(q^{2s}-qb_n)},$$

と置きましょう。cはある定数で、この式は既約に書かれているとします。このとき、

$$\det{}_D(T,s):=\det{}_D(1-Tq^{-s}+q^{1-2s})=\prod_{n=1}^{M}(1-\lambda_nq^{-s}+q^{1-2s}),$$

$$\det{}_C(T,s):=\prod_{|b_j|<1}(1-q^{-2s+1}b_j)\prod_{|b_j|>1}(1-q^{-2s+1}b_j^{-1})^{-1}$$

と定め T_Γ の行列式関数を

$$\det(T,s) := \det{}_D(T,s)\cdot\det{}_C(T,s)$$

と定義します。連続スペクトルの貢献を表す $\det_C(T,s)$ を $\varphi(s)$ の極（または、関数等式 $\varphi(s)=\varphi(1-s)$ より零点）を使って定義してやりました。このとき、次が得られます。

Theorem 3.3 [N1, Th.5.1]

$$Z_\Gamma(s)^{-1} = (1-q^{-2s})^{\chi}(1-q^{-2s+1})^{-\rho}\det(T_\Gamma,s).$$

ここで、$\chi := vol(\Gamma\backslash X)\frac{q-1}{2}$、$\rho := \frac{1}{2}tr\left(\mu-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ です。

4 The distribution of eigenvalues

この節でも、Γ は主合同部分群 $\Gamma(A)$ とします。Section 1 で述べたように、Drinfeld によって証明された Ramanujan 予想により、$\Gamma\backslash X$ はラマヌジャン・ダイアグラムであり、$\Gamma\backslash X$ 上の隣接ラプラシアン T の非自明な（つまり、$\pm(q+1)$ 以外の）離散スペクトル λ は $|\lambda|\le 2\sqrt{q}$ を満たしています。こらから先、便宜上、$T'=T/2\sqrt{q}$ として、T の代わりに T' の離散スペクトルを分布を見てみることにします。T' の非自明な離散スペクトル全体を D' と置くと $D'\subset\Omega=[-2,2]$ です。ここで、$\Omega=[-2,2]$ 上の確率測度を二つ用意しましょう。一つは、よく知られている Sato-Tate measure（または、Winger semi-circle と呼ばれている）で、

$$\mu_\infty(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$$

です。もう一つは、実数 $q\,(>1)$ に対して定義されるもので

$$\mu_q(x) = \frac{q+1}{(q^{1/2}+q^{-1/2})^2-x^2}\,\mu_\infty(x).$$

というものです。

Remark. この測度 $\mu_q(x)$ は、$\mu_\infty(x)$ に比べてあまりなじみがないかもしれませんので、一言言っておくと、正則カスプフォーム達に作用する Hecke 作用素 T_p のレベル $N\to\infty$ または重さ $k\to\infty$ としたときの固有値の分布 [S2]、p-adic Plancherel measure、$q+1$-正則 tree

のスペクトル測度等として出てきます。また、Maass wave form に関して [Sa] も見て下さい。

第二種 Chebychev 多項式系 $\{X_n(x)\}(n=0,1,\cdots)$ は$\mu_\infty(x)$ の直交多項式系の一つであることが知られていますが、また、u を不定元として

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)u^n = \frac{1}{1-xu+u^2},$$

が成り立ちます。次に、多項式 $X_{n,q}(x)$ を

$$X_{n,q} = X_n - q^{-1}X_{n-2} \quad (\text{we put } X_m = 0 \text{ for } m<0).$$

で定義すると、これらは測度$\mu_q(x)$ の直交多項式系となります。また、

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_{n,q}(x)u^n = \frac{1-u^2/q}{1-xu+u^2} \tag{4}$$

が言えます。

ここで、$T'_m = T_m/q^{\frac{m}{2}}$ と置きます。すると、(1) から

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m u^m = \frac{1-u^2/q}{1-Tu+u^2}. \tag{5}$$

が得られます。すると、(8)(9) より

$$\begin{aligned} T'_m &= X_{m,q}(T'), \\ T_m &= q^{\frac{m}{2}} X_{m,q}(T/q^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \tag{6}$$

が得られます。以上の準備のもとに、次のことが成り立ちます。

Theorem 4.1 奇素数 qを固定します。このとき、$\deg A_i \to \infty \, (i\to\infty)$ となるような任意の $\{A_i\}\,(i=0,1,2,\cdots;A_i\in\mathbb{F}_q[t])$ に対して、$\Gamma(A_i)\backslash X$上の $T'=T/\sqrt{q}$の非自明な離散スペクトルの全体 D'_iは、$\Omega=[-2,2]$ 上で測度$\mu_q(x)$ に一様分布 (弱収束) している。つまり、Ω上の $\mathbb{R}$-値な連続関数全体を $C(\Omega)$ とするとき、任意の $f\in C(\Omega)$ に対して

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{|D'_i|}\sum_{\lambda'\in D'} f(\lambda') = \int_\Omega f(x)d\mu_q(x). \tag{7}$$

が成り立つ。

これの証明を簡単に述べたいと思います。まず、多項式の族 $\{X_{n,q}(x)\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ は $C(\Omega)$ で dense なので、f として特に $X_{n,q}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ について (11) が言えれば十分です。$f=X_{n,q}$のとき、(11) の左辺に関しては$\frac{1}{|D'|}tr\,X_{n,q}(T')$ となり、これは (10) より $\frac{1}{|D'|}tr\,T'_m$です。そして、この $tr\,T'_m$は跡公式から計算ができるのです。概略を述べます。セルバーグ・ゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ は、

$$N_m := \sum_{\substack{\deg P|m \\ P\in\mathfrak{P}_\Gamma}} \deg P$$

と置くと

$$Z_\Gamma(u) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} u^m\right) \qquad (u = q^{-s} \text{ とする}) \tag{8}$$

とも表せれます。今、行列式表示 (7) と (12) の u に関する logarithmic derivative を取り、(1) を使うことによって $\{N_m\}$ 達と $\{tr\,T_m\}$ 達を結びつける公式が得られます。また、$\Gamma=\Gamma(A)$ に関しては各 m に対して、$\deg A\to\infty$ のとき $N_m\to 0$ が分かります。そして、$|D'|$ は跡公式と $\mathbb{F}_q[t] \mod A$ の Dirichlet$L$-関数の零点の個数の評価を使うことにより、

$$|D| \sim vol(\Gamma\backslash X) \quad (\text{as } \deg A\to\infty)$$

が言えます。ただし、$vol(\Gamma\backslash X)$ は Kのハール測度を 1 に normalized したときの$\Gamma\backslash X$の体積です。これらを組み合わせることによって、上の定理が得られます。詳しくは、[N2] を見て下さい。

References

[Ah] G. Ahumada, *Fonctions periodiques et formule des traces de Selberg sur les arbres,* C. R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 709–712.

[Ak] S. Akagawa, *On the Selberg zeta functions for modular groups over function fields,* 修論 東京大学 (1978).

[Dr] V. G. Drinfeld, *The proof of Peterson's Conjecture for GL(2) over global field of characteristic p,* Funct. Anal. Appl. **22** (1988), 28–43.

[E1] ———, *On the existence of cusp forms over function fields,* J. reine angew. Math. **399** (1989), 173–187.

[E2] ———, *Spectral deformations over graphs of groups,* Invent. Math. **102** (1990), 447–462.

[GN] E. Gekeler, U. Nonnengardt, *Fundametal domains of some arithmetic groups over function fields,* Internat. J. Math. **6** (1995), 689–708.

[HLW] G. Harder, W. Li, J. Weisinger, *Dimensions of spaces of cusp forms over function fields,* J. reine angew. Math. **319** (1980), 73–103.

[L1] W. Li, *On modular functions in characteristic p,* Trans. Amer. Math. Soc. **246** (1978), 231–259.

[L2] W. Li, *A survey of Ramanujan graphs,* in 'Arithmatic, Geometry and Coding Theory', Proc. International Conference held at Luminy, de Gruyter, 1996, 127–143.

[L3] W. Li, *Elliptic curves, Kloosterman sums and Ramanuja graphs,* AMS/IP Stud. Adv. Math. **7** (1998), 179–190.

[Lu] A. Lubotzky, *Lattices in rank one Lie group over local fields,* Geom. Funct. Anal, **1** (1991), 406–431.

[LPS] A. Lubotzky, R. Phillips and P. Sarnak, *Ramanujan graphs,* Combinatorica, **8** (1988), 261–277.

[Ma] G. Margulis, *Explicit group theoretic constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and concentrators,* J. Prob. of Info. Trans., (1988), 39–46.

[Mc] B. McKay, *The expected eigenvalue distribution of a large regular graph,* Lin. Alg. Appl. **40** (1981), 203–216.

[M1] M. Morgenstern, *Ramanujan diagrams,* SIAM J. Discrete Math. **7** (1994), 560–570.

[M2] ———, *Natural bounded concentrators,* Combinatorica, **15** (1995), 111–122.

[N1] H. Nagoshi, *The Selberg zeta functions over function fields,* preprint.

[N2] H. Nagoshi *The distribution of eigenvalues of arithmetic infinite graphs,* preprint.

[Sa] P. Sarnak, *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators,* Analytic Number Theory and Diophantine Problems (Stillwater, OK, 1984) Progr. Math. 70, Birkhauser, 1987, 321–331.

[S1] J. P. Serre, *Trees,* Springer-Verlag, 1980.

[S2] ———, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p,* J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 75–102.

[Te] A. Terras, *Survey of spectra of Laplacians on finite symmetric spaces,* Experiment Math. **5**(1996), 15–32.

[VN] A. B. Venkov, A. M. Nikitin, *The Selberg trace formula, Ramanujan graphs and some problems in mathematical physics,* St. Petersburg Math. J. **5** (1993), 419–484.